

MEMORIA

SUL

CALCOLO INTEGRALE

PUBBLICATA

IN VERONA

A SPESE DELLA

SOCIETÀ ITALIANA

L' ANNO M.DCC.XC.

ΤΩΝ ΠΟΝΩΝ ΠΑΝΤΑ



In un vetro antico
del Museo Vettori
di Roma.

DI PIETRO FERRONI

MATEMATICO

DI S. MAESTÀ IMP. E R. APOST.

L'IMPERATORE E RE LEOPOLDO II.

GRAN - DUCA DI TOSCANA

ETC. ETC. ETC.

PROFESSOR PUBBLICO NELLO STUDIO DI PISA

SOCIO DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA

E

DELLE ACCADEMIE

DI MANHEIM, TORINO, NAPOLI, MANTOVA

&c. &c. &c.

ΚΑΤΑ ΣΧΗΜΑ

Cecidit qui praeivit, cadet qui sequetur,
laus est omnium.

In Sorberianis.

PRODROMO

D' OSSERVAZIONI SOPRA IL TRATTATO DI CALCOLO INTEGRALE

Pubblicato in Parigi dal Sig. Marchese *de Condorcet* l' Anno M. DCC. LXV.

Di Pietro Ferroni.

STudiavo ancora le Matematiche elementari quando nel M. DCC. LXVI. fui de' primi in Italia ad avere sott' occhio l' opera veramente sublime intitolata *Du Calcul Integral par M. le Marquis de Condorcet*. La più vasta e completa raccolta, ch' io avessi letta, era allora il trattato di calcolo Integrale del Sig. de *Bougainville*, pubblicato in due parti negli anni M. DCC. LIV. e LVI.; imperocchè i tre volumi di calcolo Integrale del sempre celebre Sig. *Leonardo Euler* furono, come ognun sa, stampati a Pietroburgo nel M.DCC.LXVIII. LXIX. e LXX. (*a*).

Lessi avidamente quest' opera di *Condorcet*; ed alla prima lettura non solo mi parve che fosse come nulla quel poco, ch' io sapevo di calcolo Integrale, ma credei altresì di smarrirmi nel campo vastissimo di tante, e sì nuove, e profonde speculazioni. Riavuto dalla prima sorpresa rilessi l' opera; e come accade di chi trovandosi in paese sconosciuto prenda a poco a poco domestichezza e piacere cogli oggetti, ch' egli ha d' intorno, così ancor io a forza di meditare finalmente raggiunsi il filo della scoperta, rintracciai nell' istoria mate-

(*a*) Presso a poco contemporanei si stamparono in Parma gli *Elemens du Calcul Intégral* dei PP. Le *Seur* e *Jacquier* colla data del 1768.; come pure non prima del cadere dell' anno 1767 vide la pubblica luce il Tomo II. delle *Institutiones Analyticae* dei PP. *Riccati* e *Saladini* in Bologna.

matica tutti i paſſi, che avevano fatto altri grandi Analiſti avanti di *Condorcet*, e venni a conoſcere che la I. Sezione della I. parte di quell' opera era la conſeguenza immediata d'un ſolo teorema di *Leibnitz*. Queſto grand' uomo difatti in una Lettera da lui ſcritta d'Hannover il 3. d' agoſto del M. DC. XCVII. al famoſo *Giovanni Bernoulli* ſcoperſe il metodo, ch' egli chiamò *differentiationis de Curva in Curvam*, (*a*), e che a mio giudizio è l'origine dei progreſſi poſteriormente fatti nell'Analiſi Infiniteſimale, e perſino del Calcolo delle Variazioni (*b*).

Dopo *Leibnitz* prima di tutti gli altri pubblicò e adoperò queſto metodo nuovo *Nicola Bernoulli* nella Sezione II. d'una ſua Diſſertazione *de Trajectoriis Orthogonalibus* ſtampata negli Atti degli eruditi di Lipſia del M. DCC. XXI. (*c*); e poi lo promoſſe e generalizzò ſommamente il profondo Geometra *M. Fontaine* verſo la fine dell' anno M.DCC.XXXVIII. (*d*).

Colla guida del ſolo teorema di *Leibnitz* m' accorſi che

(*a*) Si veda l' Epiſtola LIX. a pag. 319. del Tomo I. *Virorum celeberrimorum Got. Gul. Leibnitii & Johannis Bernoullii Commercium Philoſophicum & Mathematicum* edito a Loſanna e Ginevra nel 1745. Parlano del metodo iſteſſo anche le Lettere ſeguenti LX LXI. e LXIII. a pag 321. 323. e 337 della *Raccolta* medeſima.

(*b*) Due idee luminoſe, e foriere del *Metodo delle Variazioni* contiene l' Epiſtola ſopraccitata LIX. La prima è di far variare il parametro della Logiſtica; e dalla figura riſulta ſubito che l' Arco della Curva *primitiva* eſſendo $\int bdx$, abbiaſi $\delta\int bdx$ l' iſteſſa coſa che $\int\delta(bdx)$ nella Curva *variata*. Imperocchè avverte l'iſteſſo *Leibnitz* che la *variazione* di tutto l' Arco debba eſſere eguale alla ſomma delle *variazioni* parziali degli innumerabili Archetti infiniteſimi; e queſta è Propoſizione intuitiva. La ſeconda idea felice conſiſte nel vedere colla guida della figura e del principio poc' anzi eſpoſto che $\delta\int b'dx-\delta\int bdx$ ſia la coſa medeſima di $\int\delta(b'dx)-\int\delta(bdx)$, e perciò $\delta(\int b'dx-\int bdx)$ o ſia $\delta d(\int bdx) = d\int\delta(bdx)$ o ſia $d\delta(\int bdx)$. Queſti ſono i due fondamenti, ſopra dei quali ſi ſoſtiene tutto il *Calcolo delle Variazioni*, elevato prima d' ogn' altro alla ſua generalità e perfezione dall' inſigne Analiſta M. de la *Grange* nel Tomo II. della Raccolta *Miſcellanea Taurinenſia &c.*, edito nel 1762. a pag. 173. e ſegg., e di cui poco dopo pubblicò gli Elementi *Leonardo Euler* nel Tomo X dei *Novi Commentarii &c.* dell' Accademia di Pietroburgo, ſtampato nel 1766, a pag. 51. e ſegg. Nulladimeno *M. Montucla* accenna ſolo di paſſaggio queſta ſcoperta veramente eccellente di *Leibnitz* a pag. 459. del Tomo II. dell' *Hiſtoire des Mathematiques*.

(*c*) Vedaſi il Tomo VII. dei *Supplementi* a pag. 439 § XXV. e ſegg., come ancora il Tomo II. della Collezione intitolata *Opera omnia Johannis Bernoullii* al N CXVI.

(*d*) Teorema II. e ſegg. a pag. 26. delle *Mémoires donnés à l' Académie Royale des Sciences &c par M. Fontaine*. E' un Tomo in 4. ſtampato del 1764 a Parigi; ma il ſuo *Calcul Integral* ha la data del 19. Novembre 1738.

ſi trovavano direttamente tutte l'*Equazioni di condizione* aſſegnate dal Marcheſe *de Condorcet*, e ricevevano ancora una facile e piana dimoſtrazione, ſebbene queſta per il contrario mancaſſe ſenza di quella guida nel metodo uſato dal Ch. Autore Franceſe. In oltre concepii agevolmente come facendo naſcere dal ſolo teorema di *Leibnitz* le predette generali *Equazioni di condizione*, veniſſero queſte a ricondurſi al vero ed unico loro principio fondamentale, da cui nacquero le meno univerſali *Equazioni* di *M. Fontaine*, onde appariſcano ſempre più la ſemplicità e fecondità delle regole matematiche.

Il riſultato di queſte mie rifleſſioni è quello appunto, che faccio adeſſo paleſe ai dotti Analiſti dopo d'averlo comunicato ad alcuni dei Matematici inſigni, i quali m'onorano della loro corriſpondenza. Nè credo che l'avvertire il principio unico e diretto, in cui ſi riſolve tutto il Trattato dell' *Equazioni di condizione*, che prendo a illuſtrare, poſſa mai diſpiacere al Marcheſe *de Condorcet*. Uomo ſommo com' egli è, degno allievo dell' immortal *M. d' Alembert*, Elogiografo grato alla memoria del ſuo Maeſtro, Segretario perpetuo dell' Accademia Reale delle Scienze di Parigi, e noto al mondo letterario per le ſue produzioni, che lo qualificano come uno dei primi Matematici di queſto ſecolo, neſſuno potrà mai penſare ch'egli abbia voluto far pompa di ſublimità maggiore nelle ſue formule anzichè confeſſarle come unicamente nate dalla ſcoperta di *Leibnitz*. Non è dei grandi ingegni, ma degli uomini mediocri togliere il vanto ed il nome alle ſcoperte degli altri (*a*). Le inavvertenze e gli errori medeſimi degli Autori veramente originali ſi diſtinguono ſubito da quelli degli Scrittori comuni (*b*), perchè hanno ſempre

(*a*) Quanto è da imitarſi per la ragione oppoſta il ſavio contegno del Ch. Profeſſore *Gian Franceſco Malfatti*, il quale parlando nella Nota (*a*) della pag. 749. della Parte 2. del Tomo II. di queſti *Atti della Società Italiana* (edit. nel 1784.) dell' identità in un certo caſo della Lemniſcata del *Bernoulli* e dell' *Ovale* del *Caſſini*, ſi ſerve dell' eſpreſſione *E' già noto &c.*, memore ch' io l' aveſſi dimoſtrato nell' Annotazione a pag. 552. della mia Opera *Magnitudinum Exponentialium &c.* pubblicata nel 1782.

(*b*) Un dilettante di Matematica, che voleva ſtampare un Opuſcolo intorno l' intenſità della luce, mi conſultava aſſai ſpeſſo nel 1778. e 79., e tra l' altre mi ſcriſſe dell' obliquità o inclinazione del raggio lucido ſopra

un non so che di grandezza, e formano parte della Storia istruttiva dello spirito umano: ma si distinguono moltopiù per l'accoglienza che abbia chi gli discuopra. Gli uomini di minor conto difendono sempre i loro errori acerrimamente, e per farlo ne scrivon cent'altri. All'opposto *Isacco Newton*, quel genio sublime ed incomparabile, che si può dire con tutta ragione il miracolo della specie umana, appena ebbe avviso de' pochi errori trovati nei suoi *Principj* da *Giovanni Bernoulli*, fu così savio e modesto da profittarne per la terza edizione (*a*). Con questo esempio veramente imitabile dava egli a conoscere che il privilegio esclusivo di chi professi le Scienze consista sopra di tutto nel praticare la sentenza bellissima di Pittagora ἀληθεύειν, che quel Filosofo della Grecia opinava essere il principale esercizio dell'istessa *DIVINITA'*. (*b*)

---

d'un punto. Concepii sin d'allora (per quanto mi facesse l'onore non meritato di chiamarmi uno de' primi Matematici del secolo) ch'ei non potesse mai diventare un gran Matematico. L'Anonimo, che poco sa ha mandato in giro per l'Italia il Programma in istampa sopra l'Eptagono con un paralogismo puerile a pag. 9. v. 6., non sarà mai Matematico. Questi errori decidono, e decidono senz'appello.

(*a*) Intendo di quella di Amsterdam del 1714. Del resto si consultino il Tomo I. *Opera omnia Johannis Bernoullii &c.* ai *N LXXXVIII.* e *XC.*, *Mémoires del' Académie Royale des Sciences de Paris* del 1711. pag. 47. e segg. dell'edizione in 4., *Tractatus de quadratura Curvarum* nel Tomo I. della Raccolta degli Opuscoli di *Newton* allo *Scolio* della pag. 241. e segg. *Histoire des Mathematiques* di Montucla nel T. II. a pag. 441. Ma soprattutto si leggano i due Volumi del *Commercium &c.* citato nella Nota (*a*) pag. 131.

(*b*) Due gran Ministri, i quali per la familiarità somma, che m'accordavano nella mia adolescenza, posso dir con ragione che siano stati i miei educatori, mi contarono due fatti insigni, che ho sempre a memoria. Il primo diceva che un Letterato, pieno di zelo di spargere nella sua Patria la verità, fosse solito di misurare il merito degli uomini in ragione inversa del credito Palatino, di cui godevano. Diceva l'altro come presentatosi certo Pittore a un Filosofo per disegnare il di lui Ritratto, onde poi farne Medaglia, e chiestagli l'idea del *Rovescio*, rispondesse „ Figuratemi dirimpetto al Monarca in atto d'alzare un sipario, e discuoprire la verità; ed intorno scrivete *NON AVLICVS IN AVLA*. „

ARTICOLO I.

L'Equazioni di condizione assegnate da M. de Condorcet *sono mancanti di prova, e per provarle dipendono dal solo teorema di* Leibnitz.

1. Premetto che *Condorcet* quando ha dato il suo metodo generale per la ricerca dell'*Equazioni di condizione*, lo abbia dato per indipendente del tutto da qualunque altro principio o teorema, come per esempio da quello di *Leibnitz*, ch'è il medesimo, il quale universalmente vien conosciuto sotto nome di teorema di *M. Fontaine*. Tanto è ciò vero che *Condorcet* a pag. 14. 15., e 16. nella *Remarque III.* del suo Trattato deduca per corollario delle formule generali da lui ritrovate col proprio metodo il teorema di *Fontaine* (*a*).

2. Osservo in secondo luogo che data qualunque funzione finita o differenziale V, se $\frac{dV}{dx}$ rappresenti il coefficiente o fattore di dx nel caso, in cui si supponga solamente variabile x, debbasi necessariamente scrivere e differenziare di nuovo in quest'ordine preciso $\frac{ddV}{dydx}$ mentre si voglia dalla differenza parziale di $\frac{dV}{dx}$ passare ad altra differenza parziale facendo solamente variabile y. Mutare quest'ordine, e scriver piuttosto $\frac{ddV}{dx\,dy}$ vorrebbe dire supporre l'identità delle due espressioni $\frac{ddV}{dydx}$, $\frac{ddV}{dxdy}$. Ma questa identità, che si verrebbe a supporre, non è un assioma, non è una proposizione intui-

(*a*) Si corregga lo sbaglio a pag. 15. v. 5., dove in cambio di $\frac{dD}{dz}$ deve essere apposto $\frac{dD}{dx}$.

tiva, ed è all'incontro un teorema, che ha bisogno di prova, poichè è l'istesso teorema di *Leibnitz* o di *Fontaine* (*a*). *Condorcet* a pag. 5. n. 4. dice, parlando di questa maniera d'esprimere i secondi differenziali di V, che *revient au même* il supporre $\frac{ddV}{dxdy}$ come differenziale di $\frac{dV}{dy}$ col far variare unicamente x (e sta bene), o come differenziale di $\frac{dV}{dx}$ col far variare unicamente y (ed ha bisogno di prova). Se *Condorcet* per ritrovar le sue formule si fosse mai servito di quella identità come derivata dal teorema di *Fontaine*, non vi sarebbe difficoltà ad accordarglielo in quel medesimo senso, nel quale l'assume l'istesso *Fontaine* a pag. 26. delle *Memorie* precitate, col dire però *comme nous le demontrerons bien-tôt*, ed a pag. 27. lo dimostra di fatto (*b*). Adunque o il Marchese *de Condorcet* intende, quando l'annunzia ed adopera, l'identità delle due espressioni $\frac{ddV}{dydx}$, $\frac{ddV}{dxdy}$ come dedotta dal teorema di *Fontaine*, il quale finalmente consiste in quella identità; ed allora sarebbe circolo vizioso o petizione di principio dedurre in prova della generalità e verità delle sue formule il teorema di *Fontaine*, col dire che i due metodi siano del tutto diversi tra loro, siccome egli fa a pag. 14. 15. e 16. O intende piuttosto che quell'identità non abbia bisogno di prova, ed allora ne verrebbe la conseguenza che fosse assioma analitico il teorema di *Fontaine*, e perciò fosse un inutile corollario delle sue formule generali.

3. Rifletto di più che l'esempio di *M. de la Grange*, il quale assume ancor esso senza provarlo, esser sempre $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2x = d^2\delta x$ &c. (*c*) non sia applicabile all'altro caso espo-

(*a*) Ved. Art. II. al §. 7.

(*b*) Anche nelle Formule di *Fontaine*, che sono a pag. 2. della Tavola Preliminare alle sue *Mémoires &c.*, bisogna aver riguardo all'inversione d'ordine nel posto de' differenziali nei denominatori. Questa inversione, dipendente dalla prima scelta di notare i differenziali, può ancora accordarsegli, perchè suppone sempre quello, che poi dimostra, cioè $\frac{ddu}{dydx} = \frac{ddu}{dxdy}$.

(*c*) Tom II. *des Melanges &c.* citato nella not. *b.* pag. 131

sto di sopra. Imperocchè questa identità dei differenziali, comunque siano combinati e disposti i segni δ, d della differenziazione, *M. de la Grange* l'assume, è vero, come provata in principio del suo *Essai d'une nouvelle Methode &c.* a pag. 175. del volume citato, ma non la deriva poi, come fa nell'altro caso il Marchese di *Condorcet*, per corollario delle proprie formule. Deve in oltre osservarsi che dimostrare l'identità dei differenziali di *M. de la Grange* sia della maggiore facilità, perchè ognuno vede che $dx = x' - x$, e però $\delta dx = \delta x' - \delta x = d\delta x$. Parimente $d^2x = dx' - dx = x'' - x' - x' + x$, onde $\delta d^2x = \delta x'' - \delta x' - \delta x' + \delta x = d\delta x' - d\delta x = d^2\delta x$ (*a*).

4. Finalmente convien sapere che tutte l'*Equazioni di condizione* somministrate da *Condorcet* si contengano nella sola formula del suo *Problema II.* Quanto al Problema I. non se ne dubita, essendo men generale del II. per la fattavi supposizione di dx costante. Il Problema III. ha di più del II. un numero qualunque di variabili x, y, u, z *&c.*, mentre il II. n'ha sole due x, y. Tuttavia, posta mente alla fattura del calcolo, si rende chiaro che il maggior numero delle variabili non accresca in modo alcuno nè la difficoltà di ritrovare, nè la difficoltà d'esprimere l'*Equazioni di condizione*, siccome accorda a pag. 11. l'Autore medesimo. In oltre il Problema IV. si risolve unicamente nell'applicazione progressiva delle formule dei problemi precedenti all'effetto di assegnare di grado in grado l'*Equazioni di condizione* fino a quella dell'Integrale *finito* della data funzione differenziale. Ed in ultimo luogo i rimanenti Problemi V. VI. e VII., i quali s'occupano di ritrovare l'*Equazioni di condizione* non più delle funzioni, come gli anteriori, ma dell'equazioni differenziali di qualunque ordine e numero di variabili, sono ancor essi la replica delle formule del Problema II. (*b*)

(*a*) Si prova coll'istessa facilità $d^2\delta x = d\delta dx$; poichè $\delta dx = d\delta x$, e perciò $d\delta dx = dd\delta x = \delta ddx$ in tutte le tre combinazioni.

(*b*) Soprattutto s'attenda dopo il Problema V. alla *Remarque*, ch'è a pag. 24. In proposito dell'*Equazioni di condizione* per l'integrabilità dell'Equazioni differenziali pare che *M. de Condorcet* alla pag. 29. dia il vanto

per la ragione che un' equazione differenziale debba esser sempre la differenza d' una funzione V moltiplicata per un fattore indeterminato ed incognito A, onde applicandovi l' istesso metodo adoperato nel Problema II. non vi sia di bisogno d' altro artifizio fuori di quello che somministra l' Algebra Cartesiana per l' eliminazione di A, dA, d^2A &c., fatta la quale si conseguiscono subito tante *equazioni di condizione*, tutte determinate, quante sono di numero le variabili meno l' unità, o meno 2, 3 &c. quando uno, due &c. dei differenziali si supponesser costanti. Di qui ne segue che sottoposto ad esame il solo Problema II., venga ad essere esaminata tutta intiera la teoria del Marchese *de Condorcet*.

5. Questo Problema II. ricerca quali siano l' *equazioni di condizione* perchè la funzione differenziale V di qualunque grado, ma di due sole variabili x, y, e senza nessuna differenza costante, abbia per integrale l' altra funzione B del grado prossimamente inferiore. Seguiterò fedelmente il metodo tenuto da *Condorcet*, colle sue stesse denominazioni, nè farò altro che spiegarlo di più, affine di renderlo di maggior chiarezza per tutti (*a*).

Si facciano adunque $dx = p$, $d^2x = q$, $d^3x = r$, $d^4x = s$ &c.
$dy = p'$, $d^2y = q'$, $d^3y = r'$, $d^4y = s'$ &c.

Fatte le debite sostituzioni, la funzione V si cambia in un' espressione *apparentemente* finita, perchè composta di $x, y, p, p', q, q', r, r'$ &c.

Per la natura del problema abbiamo quest' unica equazione $V = dB$, che va sviluppata nelle sue differenze parziali (*b*).

della prima scoperta a *M. Fontaine*; ma veramente *Nicola Bernoulli* sino dall' anno $172\frac{0}{1}$. n' aveva dato un saggio nella sua *Memoria* intorno le Trajettorie ortogonali.

(*a*) Sia confrontato il Calcolo, che segue, con quello del Problema I., e degli altri che ne succedono.

(*b*) Il primo ad introdurre nel Calcolo Infinitesimale le differenze *parziali* si deve dire che fosse *Leibnitz* nel 1697. Il primo ad applicarle alla Fisico-Matematica, e nominatamente all' Idrostatica sublime, fu M *Clairaut* nell' aurea sua Opera *de la Figure de la Terre* pubblicata nel 1743. Il primo, che integrasse coll' aggiunta di funzioni continue arbitrarie l' equazioni comprendenti delle differenze parziali, fu *M. d' Alembert* nel 1747. Ma il passo più grande lo fece l'*Euler* allora quando introdusse nel Calcolo le funzioni irregolari o discontinue poco dopo del 1752. (Ved. il Tomo I. *Miscellanea Taurinensia* edito nel 1759.)

Abbiamo ancora una confeguenza immediata di quella equazione fondamentale, ed è $dV = ddB$; e fe ne potrebbero avere quant' altre fi vogliano mentre foffero neceffarie; ma baftano le due fole $V = dB$, $dV = ddB$, che fono in foftanza l' iftefla equazione.

Da $V = dB$ fi ricava
$$V = \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dp}dp + \frac{dB}{dq}dq + \frac{dB}{dr}dr + \text{ec.}$$
$$+ \frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dp'}dp' + \frac{dB}{dq'}dq' + \frac{dB}{dr'}dr' + \text{ec.}$$

Da $dV = ddB$ s' ottiene
$$dV = d\left\{\frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dp}dp + \frac{dB}{dq}dq + \frac{dB}{dr}dr + \text{ec.}\right\}$$
$$\left\{\frac{dB}{dy}dy + \frac{dB}{dp}dp' + \frac{dB}{dq'}dq' + \frac{dB}{dr'}dr' + \text{ec.}\right\}$$

Ma V effendo una funzione data, ed efpreffa in tutti i fuoi termini, che la compongono, faranno anche dati, ed efpreffi tutti i termini componenti il fuo differenziale
$$Ndx + Pdp + Qdq + Rdr + \text{ec.}$$
$$+ N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \text{ec.}$$

Adunque

$$
\begin{aligned}
& Ndx + Pdp + \mathfrak{Q}dq + Rdr + \text{ec.} \\
& + N'dy + P'dp' + \mathfrak{Q}'dq' + R'dr' + \text{ec.} \\
= & \left(\frac{ddB}{dx^2}dx + \frac{ddB}{dxdp}dp + \frac{ddB}{dxdq}dq + \frac{ddB}{dxdr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dxdy}dy + \frac{ddB}{dxdp'}dp' + \frac{ddB}{dxdq'}dq' + \frac{ddB}{dxdr'}dr' + \text{ec.}\right)dx \\
+ & \left(\frac{ddB}{dydx}dx + \frac{ddB}{dydp}dp + \frac{ddB}{dydq}dq + \frac{ddB}{dydr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dy^2}dy + \frac{ddB}{dydp'}dp' + \frac{ddB}{dydq'}dq' + \frac{ddB}{dydr'}dr' + \text{ec.}\right)dy \\
+ & \left(\frac{ddB}{dpdx}dx + \frac{ddB}{dp^2}dp + \frac{ddB}{dpdq}dq + \frac{ddB}{dpdr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dpdy}dy + \frac{ddB}{dpdp'}dp' + \frac{ddB}{dpdq'}dq' + \frac{ddB}{dpdr'}dr' + \text{ec.}\right)dp + \frac{dB}{dx}dp \\
+ & \left(\frac{ddB}{dp'dx}dx + \frac{ddB}{dp'dp}dp + \frac{ddB}{dp'dq}dq + \frac{ddB}{dp'dr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dp'dy}dy + \frac{ddB}{dp'^2}dp' + \frac{ddB}{dp'dq'}dq' + \frac{ddB}{dp'dr'}dr' + \text{ec.}\right)dp' + \frac{dB}{dy}dp' \\
+ & \left(\frac{ddB}{dqdx}dx + \frac{ddB}{dqdp}dp + \frac{ddB}{dq^2}dq + \frac{ddB}{dqdr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dqdy}dy + \frac{ddB}{dqdp'}dp' + \frac{ddB}{dqdq'}dq' + \frac{ddB}{dqdr'}dr' + \text{ec.}\right)dq + \frac{dB}{dp}dq \\
+ & \left(\frac{ddB}{dq'dx}dx + \frac{ddB}{dq'dp}dp + \frac{ddB}{dq'dq}dq + \frac{ddB}{dq'dr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dq'dy}dy + \frac{ddB}{dq'dp'}dp' + \frac{ddB}{dq'^2}dq' + \frac{ddB}{dq'dr'}dr' + \text{ec.}\right)dq' + \frac{dB}{dp'}dq' \\
+ & \left(\frac{ddB}{drdx}dx + \frac{ddB}{drdp}dp + \frac{ddB}{drdq}dq + \frac{ddB}{dr^2}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{drdy}dy + \frac{ddB}{drdp'}dp' + \frac{ddB}{drdq'}dq' + \frac{ddB}{drdr'}dr' + \text{ec.}\right)dr + \frac{dB}{dq}dr \\
+ & \left(\frac{ddB}{dr'dx}dx + \frac{ddB}{dr'dp}dp + \frac{ddB}{dr'dq}dq + \frac{ddB}{dr'dr}dr + \text{ec.} + \frac{ddB}{dr'dy}dy + \frac{ddB}{dr'dp'}dp' + \frac{ddB}{dr'dq'}dq' + \frac{ddB}{dr'^2}dr' + \text{ec.}\right)dr' + \frac{dB}{dq'}dr' \\
+ & \left(\quad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \quad + \quad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \quad\right) + \frac{dB}{dr}ds \\
+ & \left(\quad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \quad + \quad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \quad\right) + \frac{dB}{dr'}ds'
\end{aligned}
$$

6. Questa equazione per la sua natura e qualità dovendo essere e nel tutto e nelle sue parti omologhe identica, dà l'origine a tante altre equazioni parimente identiche, quanti sono i termini del primo membro. Separati perciò i coefficienti o fattori dei respettivi differenziali dx, dy, dp, dp', dq, dq', dr, dr', ec., derivano dalla prima equazione le subalterne, che seguono,

$$N=\frac{ddB}{dx^2}dx+\frac{ddB}{dxdp}dp+\frac{ddB}{dxdq}dq+\frac{ddB}{dxdr}dr+ec.+\frac{ddB}{dxdy}dy+\frac{ddB}{dxdp'}dp'+\frac{ddB}{dxdq'}dq'+\frac{ddB}{dxdr'}dr'+ec.$$

$$N=\frac{ddB}{dydx}dx+\frac{ddB}{dydp}dp+\frac{ddB}{dydq}dq+\frac{ddB}{dydr}dr+ec.+\frac{ddB}{dy^2}dy+\frac{ddB}{dydp'}dp'+\frac{ddB}{dydq}dq'+\frac{ddB}{dydr'}dr'+ec.$$

$$P=\frac{ddB}{dpdx}dx+\frac{ddB}{dp^2}dp+\frac{ddB}{dpdq}dq+\frac{ddB}{dpdr}dr+ec.+\frac{ddB}{dpdy}dy+\frac{ddB}{dpdp'}dp'+\frac{ddB}{dpdq'}dq'+\frac{ddB}{dpdr'}dr'+ec.+\frac{dB}{dx}$$

$$P'=\frac{ddB}{dp'dx}dx+\frac{ddB}{dp'dp}dp+\frac{ddB}{dp'dq}dq+\frac{ddB}{dp'dr}dr+ec.+\frac{ddB}{dp'dy}dy+\frac{ddB}{dp'^2}dp'+\frac{ddB}{dp'dq'}dq'+\frac{ddB}{dp'dr'}dr'+ec.+\frac{dB}{dy}$$

$$Q=\frac{ddB}{dqdx}dx+\frac{ddB}{dqdp}dp+\frac{ddB}{dq^2}dq+\frac{ddB}{dqdr}dr+ec.+\frac{ddB}{dqdy}dy+\frac{ddB}{dqdp'}dp'+\frac{ddB}{dqdq'}dq'+\frac{ddB}{dqdr'}dr'+ec.+\frac{dB}{dp}$$

$$Q'=\frac{ddB}{dq'dx}dx+\frac{ddB}{dq'dp}dp+\frac{ddB}{dq'dq}dq+\frac{ddB}{dq'dr}dr+ec.+\frac{ddB}{dq'dy}dy+\frac{ddB}{dq'dp'}dp'+\frac{ddB}{dq'^2}dq'+\frac{ddB}{dq'dr'}dr'+ec.+\frac{dB}{dp'}$$

$$R=\frac{ddB}{drdx}dx+\frac{ddB}{drdp}dp+\frac{ddB}{drdq}dq+\frac{ddB}{dr^2}dr+ec.+\frac{ddB}{drdy}dy+\frac{ddB}{drdp'}dp'+\frac{ddB}{drdq'}dq'+\frac{ddB}{drdr'}dr'+ec.+\frac{dB}{dq}$$

$$R'=\frac{ddB}{dr'dx}dx+\frac{ddB}{dr'dp}dp+\frac{ddB}{dr'dq}dq+\frac{ddB}{dr'dr}dr+ec.+\frac{ddB}{dr'dy}dy+\frac{ddB}{dr'dp'}dp'+\frac{ddB}{dr'dq'}dq'+\frac{ddB}{dr'^2}dr'+ec.+\frac{dB}{dq'}$$

ec. ec. ec. ec.

7. Sin qui tutto il calcolo è nuovo, e felice, e non apparifce d'aver bifogno di neffun'altra anteriore fcoperta dell' Analifi infinitefimale. Ma *Condorcet* va più avanti, e dice a pag. 7. e 10. che riducendo ciafcheduna delle precedenti equazioni (*& reduifant, en mettant pour les fuites qui multiplient ec.*) fiano le medefime che

$$N=d\frac{dB}{dx}, P=\frac{dB}{dx}+d\frac{dB}{dp}, Q=\frac{dB}{dp}+d\frac{dB}{dq}, R=\frac{dB}{dq}+d\frac{dB}{dr}, \text{ec., ec.}$$

$$N'=d\frac{dB}{dy}, P'=\frac{dB}{dy}+d\frac{dB}{dp'}, Q'=\frac{dB}{dp'}+d\frac{dB}{dq'}, R'=\frac{dB}{dq'}+d\frac{dB}{dr'}, \text{ec., ec.}$$

In quefta riduzione confifte appunto l' equivoco, e mentre pare al ch. Autore di non aver indizio di neffun altro foccorfo di principio eftraneo ed indipendente dall' algoritmo del fuo calcolo generale, riduce tutto tacitamente fenz' avvederfene al folo teorema di *Leibnitz*. Imperciocchè

$$d\frac{dB}{dx}=\frac{ddB}{dx^2}dx+\frac{ddB}{dpdx}dp+\frac{ddB}{dqdx}dq+\frac{ddB}{drdx}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydx}dy+\frac{ddB}{dp'dx}dp'+\frac{ddB}{dq'dx}dq'+\frac{ddB}{dr'dx}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dy}=\frac{ddB}{dxdy}dx+\frac{ddB}{dpdy}dp+\frac{ddB}{dqdy}dq+\frac{ddB}{drdy}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dy^2}dy+\frac{ddB}{dp'dy}dp'+\frac{ddB}{dq'dy}dq'+\frac{ddB}{dr'dy}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dp}=\frac{ddB}{dxdp}dx+\frac{ddB}{dp^2}dp+\frac{ddB}{dqdp}dq+\frac{ddB}{drdp}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydp}dy+\frac{ddB}{dp'dp}dp'+\frac{ddB}{dq'dp}dq'+\frac{ddB}{dr'dp}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dp'}=\frac{ddB}{dxdp'}dx+\frac{ddB}{dpdp'}dp+\frac{ddB}{dqdp'}dq+\frac{ddB}{drdp'}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydp'}dy+\frac{ddB}{dp'^2}dp'+\frac{ddB}{dq'dp'}dq'+\frac{ddB}{dr'dp'}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dq}=\frac{ddB}{dxdq}dx+\frac{ddB}{dpdq}dp+\frac{ddB}{dq^2}dq+\frac{ddB}{drdq}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydq}dy+\frac{ddB}{dp'dq}dp'+\frac{ddB}{dq'dq}dq'+\frac{ddB}{dr'dq}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dq'}=\frac{ddB}{dxdq'}dx+\frac{ddB}{dpdq'}dp+\frac{ddB}{dqdq'}dq+\frac{ddB}{drdq'}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydq'}dy+\frac{ddB}{dp'dq'}dp'+\frac{ddB}{dq'^2}dq'+\frac{ddB}{dr'dq'}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dr}=\frac{ddB}{dxdr}dx+\frac{ddB}{dpdr}dp+\frac{ddB}{dqdr}dq+\frac{ddB}{dr^2}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydr}dy+\frac{ddB}{dp'dr}dp'+\frac{ddB}{dq'dr}dq'+\frac{ddB}{dr'dr}dr'+\text{ec.}$$

$$d\frac{dB}{dr'}=\frac{ddB}{dxdr'}dx+\frac{ddB}{dpdr'}dp+\frac{ddB}{dqdr'}dq+\frac{ddB}{drdr'}dr+\text{ec.}+\frac{ddB}{dydr'}dy+\frac{ddB}{dp'dr'}dp'+\frac{ddB}{dq'dr'}dq'+\frac{ddB}{dr'^2}dr'+\text{ec.}$$

e così dell'altre. Fatto adunque il paragone di questi veri ed esatti differenziali coi differenziali, che s' incontrano nell'equazioni del precedente §. 6., si vede chiaro come all' effetto che i secondi coincidano con i primi sia necessario supporre verificata l' identità di tutte le seguenti equazioni

$$\frac{ddB}{dxdp}=\frac{ddB}{dpdx},\ \frac{ddB}{dxdq}=\frac{ddB}{dqdx},\ \frac{ddB}{dxdr}=\frac{ddB}{drdx},\ \frac{ddB}{dxdy}=\frac{ddB}{dydx},$$
$$\frac{ddB}{dxdp'}=\frac{ddB}{dp'dx},\ \frac{ddB}{dxdq'}=\frac{ddB}{dqdx},\ \frac{ddB}{dxdr'}=\frac{ddB}{dr'dx},\ \frac{ddB}{dydp}=\frac{ddB}{dpdy},$$
$$\frac{ddB}{dydq}=\frac{ddB}{dqdy},\ \frac{ddB}{dydr}=\frac{ddB}{drdy},\ \frac{ddB}{dydp'}=\frac{ddB}{dp'dy},\ \frac{ddB}{dydq'}=\frac{ddB}{dq'dy},$$
$$\frac{ddB}{dydr'}=\frac{ddB}{dr'dy},\ \frac{ddB}{dpdq}=\frac{ddB}{dqdp},\ \frac{ddB}{dpdr}=\frac{ddB}{drdp},\ \frac{ddB}{dpdp'}=\frac{ddB}{dp'dp},$$
$$\frac{ddB}{dpdq'}=\frac{ddB}{dq'dp},\ \frac{ddB}{dpdr'}=\frac{ddB}{drdp},\ \frac{ddB}{dp'dq}=\frac{ddB}{dqdp'},\ \frac{ddB}{dpdr}=\frac{ddB}{drdp'},$$
$$\frac{ddB}{dp'dq'}=\frac{ddB}{dq'dp'},\ \frac{ddB}{dpdr'}=\frac{ddB}{dr'dp'},\ \frac{ddB}{dqdr}=\frac{ddB}{drdq},\ \frac{ddB}{dqdq'}=\frac{ddB}{dq'dq},$$
$$\frac{ddB}{dqdr'}=\frac{ddB}{drdq},\ \frac{ddB}{dq'dr}=\frac{ddB}{drdq'},\ \frac{ddB}{dq'dr'}=\frac{ddB}{dr'dq'},\ \frac{ddB}{drdr'}=\frac{ddB}{dr'dr}.$$

La verificazione dell' identità di tutte queſte equazioni, tante di numero, quanti ſono i binarj poſſibili delle variabili x, y, p, p', q, q', r, r' della data funzione, cioè nel noſtro caſo particolare tante di numero quant' è $\frac{8.7}{1.2} = 28$ come ſono di fatto, non vuol dir altro che il teorema di *Leibnitz* o di *Fontaine*, cioè non vuol dir altro che la verificazione dell' identità di quelle equazioni, che *Condorcet* dà più ſotto nell' Oſſervazione III. del Problema III. come conſeguenza delle ſue formule.

8. Di ciò non potrà dubitarſi avvertendo che $V = dB$, e $dV = ddB = Ndx + Pdp + Qdq + Rdr + Sds$ ecc. $+ N'dy + P'dp' + Q'dq' + R'dr' + S'ds'$ ecc. laonde V dev' eſſere una funzione rappreſentabile in queſta forma $V = Adx + (B)dp + Cdq + Ddr$ ecc. $+ A'dy + B'dp' + C'dq' + D'dr' +$ ecc. Adunque $\frac{dB}{dx} = A$, $\frac{dB}{dp} = (B)$, $\frac{dB}{dq} = C$, $\frac{dB}{dr} = D$, ecc., $\frac{dB}{dy} = A'$, $\frac{dB}{dp'} = B'$, $\frac{dB}{dq'} = C'$, $\frac{dB}{dr'} = D'$, ecc. Ma l' equazioni, che naſcono dal

teorema di *Fontaine*, sono $\frac{dA}{dp}=\frac{d'B)}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dpdx}=\frac{ddB}{dxdp}, \frac{dA}{dq}$
$=\frac{dC}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dqdx}=\frac{ddB}{dxdq}, \frac{dA}{dr}=\frac{dD}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{drdx}=\frac{ddB}{dxdr}$ ec., $\frac{dA}{dy}=\frac{dA'}{dx}$
cioè $\frac{ddB}{dydx}=\frac{ddB}{dxdy}, \frac{dA}{dp'}=\frac{dB'}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dp'dx}=\frac{ddB}{dxdp'}, \frac{dA}{dq'}=\frac{dC'}{dx}$
cioè $\frac{ddB}{dq'dx}=\frac{ddB}{dxdq'}, \frac{dA}{dr'}=\frac{dD'}{dx}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dx}=\frac{ddB}{dxdr'}, \frac{dA'}{dp}=\frac{d(B)}{dy}$
cioè $\frac{ddB}{dpdy}=\frac{ddB}{dydp}, \frac{dA'}{dq}=\frac{dC}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dqdy}=\frac{ddB}{dydq}, \frac{dA}{dr}=\frac{dD}{dy}$ cioè
$\frac{ddB}{drdy}=\frac{ddB}{dydr}, \frac{dA'}{dp'}=\frac{dB'}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dp'dy}=\frac{ddB}{dydp'}, \frac{dA'}{dq'}=\frac{dC'}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dq'dy}$
$=\frac{ddB}{dydq'}, \frac{dA'}{dr'}=\frac{dD'}{dy}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dy}=\frac{ddB}{dydr'}, \frac{d(B)}{dq}=\frac{dC}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{dqdp}$
$=\frac{ddB}{dpdq}, \frac{d(B)}{dr}=\frac{dD}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{drdp}=\frac{ddB}{dpdr}, \frac{d(B)}{dp'}=\frac{dB'}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{dp\,dp}$
$=\frac{ddB}{dpdp'}, \frac{d(B)}{dq'}=\frac{dC'}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{dq'dp}=\frac{ddB}{dpdq'}, \frac{d(B)}{dr'}=\frac{dD'}{dp}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dp}$
$=\frac{ddB}{dpdr'}, \frac{dB'}{dq}=\frac{dC}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{dqdp'}=\frac{ddB}{dp'dq}, \frac{dB'}{dr}=\frac{dD}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{drdp'}$
$=\frac{ddB}{dp'dr}, \frac{dB'}{dq'}=\frac{dC'}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{dq'dp'}=\frac{ddB}{dp'dq'}, \frac{dB}{dr'}=\frac{dD'}{dp'}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dp'}$
$=\frac{ddB}{dp'dr'}, \frac{dC}{dr}=\frac{dD}{dq}$ cioè $\frac{ddB}{drdq}=\frac{ddB}{dqdr}, \frac{dC}{dq}=\frac{dC'}{dq}$ cioè $\frac{ddB}{dq'dq}=\frac{ddB}{dqdq'}$,
$\frac{dC}{dr'}=\frac{dD'}{dq}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dq}=\frac{ddB}{dqdr'}, \frac{dC'}{dr}=\frac{dD}{dq'}$ cioè $\frac{ddB}{drdq'}=\frac{ddB}{dq'dr}, \frac{dC'}{dr'}$
$=\frac{dD'}{dq'}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dq'}=\frac{ddB}{dq'dr'}, \frac{dD}{dr'}=\frac{dD'}{dr}$ cioè $\frac{ddB}{dr'dr}=\frac{ddB}{drdr'}$ ecc.

In

In conseguenza fa di mestiero che si convenga come le formule di *Condorcet* si risolvano finalmente nel teorema solo di *Fontaine* (*a*), e lo presuppongano trovato e dimostrato, affine di conseguire e provare ciò, che si ottiene da questo metodo nuovo ed universale.

9. Supposta unicamente provata quell' identità d' equazioni, allora si ricavano subito dalla medesima le formule generali di *Condorcet* per l' *equazioni di condizione*. E di fatti richiamate l' espressioni e denominazioni dei tre §§. antecedenti 5.° 6.° 7.°, ognun vede che

$$d\frac{dB}{dx} - d\left(\frac{dB}{dx} + d\frac{dB}{dp}\right) + d^2\left(\frac{dB}{dp} + d\frac{dB}{dq}\right) - d^3\left(\frac{dB}{dq} + d\frac{dB}{dr}\right) + d^4\frac{dB}{dr}\text{ ecc.} = 0$$

$$d\frac{dB}{dy} - d\left(\frac{dB}{dy} + d\frac{dB}{dp'}\right) + d^2\left(\frac{dB}{dp'} + d\frac{dB}{dq'}\right) - d^3\left(\frac{dB}{dq'} + d\frac{dB}{dr'}\right) + d^4\frac{dB}{dr'}\text{ ecc.} = 0$$

siano equazioni perfettamente identiche a motivo dell' elisione di tutti i loro termini; e perciò ancora, sostituendo, verranno ad essere identiche in generale l' equazioni

$$N - dP + d^2 Q - d^3 R + d^4 S - \text{ecc.} = 0$$
$$N - dP' + d^2 Q' - d^3 R' + d^4 S' - \text{ecc.} = 0$$

per qualunque funzione differenziale. Sarà però sempre vero che non s'arrivi mai a dimostrarle con tutto il rigore, che esigono le verità matematiche, se non col presupporre il teorema solo di *Leibnitz*, siccome mi ero proposto sin da principio di far conoscere agli Analisti (*b*). In somma tutto il fondo della scoperta è il N. 4. della pagina 5 dove si stabilisce $\frac{ddV}{dxdy} = \frac{ddV}{dydx}$, senza del qual teorema precognito le formu-

(*a*) Si legga il N. 7. del seguente Articolo II

(*b*) *L' equazioni di condizione* sono l'istessa cosa del teorema di *Leibnitz*, ma non così i logaritmi di *Neper*, veramente detti *Neperiani* o Iperbolici, e quelli d' *Archimede* come scrive a pag. 72 l' Autore della Dissertazione, che segue l' Elogio di *Amerigo Vespucci* pubblicato in Firenze nel 1788. Difatti i logaritmi d' Archimede combinano col sistema di Briggs, sebbene ancor esso immaginato da *Neper*. E poi il Tomo III. delle *Opere Matematiche di Vallis*, dove comparve per la prima volta il frammento del libro II. della Collezione di *Pappo*, in cui è riportato il metodo di *Archimede*, vide la pubblica luce nel 1699, quando la scoperta di *Neper* (intendo sempre dei logaritmi veri Neperiani, non dei Briggiani o *Tavolari*) è del 1614.

le tutte di *Condorcet* mancherebbero di prova, perchè non contengono la condizione dell' integrabilità della data funzione.

ARTICOLO II.

Col solo teorema di Leibnitz, *anche diversamente dal metodo generale di* M de Condorcet. *si trovano, e si dimostrano le sue equazioni di condizione.*

1. Quantunque abbiamo fino ad ora osservato come tutte l'*equazioni di condizione* dipendano nel nuovo metodo di *Condorcet* dal teorema di *Leibnitz*, e come presupposto unicamente questo, acquistino quella piena dimostrazione, che possa mai essere desiderata; tuttavolta non pare che le suddette formule nascano dal teorema medesimo con tanta chiarezza e semplicità, quanta dovrebb' esservi seguitando la naturale filiazione d'una cosa dall'altra, che forma il bello dei metodi matematici. Mi muove a così pensarne il vedere che nel caso semplicissimo della funzione differenziale di primo grado $Adx + Bdy$ il metodo di *Condorcet*, per conservare la sua generalità, sia obbligato a somministrare due equazioni identiche $N - dP = o, N' - dP' = o$, la seconda delle quali non è altro che la replica della prima (*a*), e che l'istesso segua rispetto all'altra funzione parimente di primo grado $Adx + Bdy + Cdu + Ddz$, dove in cambio di sei sole equazioni identiche, che darebbe il teorema di *Leibnitz* (perchè a quattro variabili corrispondono solamente $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ binarj) bisogna soffrire che il metodo di *Condorcet* ne dia quattro $N - dP = o, N' - dP' = o, N'' - dP'' = o, N''' - dP''' = o$, da cui se ne derivano dodici in apparenza, ma sei nella sostanza come quelle, che tutte si trovano replicate (*b*). Questa sorte di *pleonasmo* analitico, il quale s' incontrerebbe maggiore facendo il confronto dell'equazioni generali di *Condor-*

(*a*) Vedasi in fondo della pag. 25 *Du Calcul Integral*.
(*b*) Pag. 25 al v. 5 e seqq.

cet colle particolari dedotte naturalmente dal teorema di *Leibnitz* nel caſo di funzioni differenziali di più alto grado del primo, oltrechè diminuiſce l'eleganza delle formule, e ſoggetta il Calcolatore a fare una ſcelta o riduzione dell' equazioni identiche più ſemplici, onde ſeparare le primitive e ſoſtanziali dall'altre inutili, che le ripetano puramente, mi ſembra ancora accennare ch'abbia da eſſervi nell' Analiſi qualche compenſo di riſparmiare le repliche nella ricerca dell' *equazioni di condizione*, e conſeguire nulladimeno il medeſimo fine.

2. Ho adunque tentato di rintracciare queſto compenſo, e credo d'averlo trovato. Nè m'ha diſtolto da tentarlo il ſapere che il gran Geometra *Leonardo Euler* nell' *Appendice* al Volume III. delle ſue Inſtituzioni di calcolo integrale abbia detto eſſere appena ſperabile trovar mezzo di dimoſtrare *l'equazione* generaliſſima *di condizione* $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} -$ ec. $= 0$ perchè ſia integrabile $\int V dx$ quando non ſi ricorra, com'egli ha fatto per dimoſtrarla, al *metodo delle variazioni* applicato alla profonda teoria dei *maſſimi* e *minimi* (*a*). Imperciocchè primieramente avvertivo che ſenza l'ajuto del *metodo delle variazioni* e dei *maſſimi* e *minimi* era riuſcito al Marcheſe *de Condorcet* ricavar quella formula univerſale, e le ſue analoghe, dal puro fondo dell'Algebra Infiniteſimale, ch'è quanto dire dal ſolo fonte (ſebbene egli non lo penſaſſe) del teorema di *Fontaine* o ſivvero di *Leibnitz*, il qual teorema non ha neſſuna relazione coi *maſſimi* e *minimi*, nè tampoco neſſun principio indiretto che perturbi l'ordine naturale del calcolo con alterare la dipendenza e ſucceſſione delle ſue parti, non meno che confonde-

(*a*) Queſto Matematico ſommo ſcrive così a pag. 120 n. I § 36. *Demonſtratio hujus Theorematis omnino eſt ſingularis, cum ex doctrina variationum ſit petita, quæ tamen ab hoc argumento prorſus eſt aliena: vix vero alia via patet ad ejus demonſtrationem pertingendi*. E ſembra che ſi riporti a ciò che egli aveva ſcritto nel Tomo X. dei *Novi Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Petropolitanæ* a pag. 134, pubblicato nel 1766.

re le matematiche astratte colle applicate, siccome fecero gli scrittori principalmente del secolo XVII., cui piacque persino arricchire inopportunamente la geometria e l'algebra colle dimostrazioni dedotte dalla scienza dell'equilibrio e del moto (*a*). Forse mentr'*Euler* scriveva quell'*Appendice*, che si pubblicò nell'anno M. DCC. LXX., o non sapeva che *Condorcet* sino dal M. DCC. LXV. avesse scoperto il metodo diretto di derivare dall'Analisi pura l'*equazione di condizione* $N - dP + d^2Q - d^3R + d^4S -$ ec. $= 0$ come criterio d'integrabilità di SV, o non reputava possibile ricavarla, come ho fatt'io, dall'unico teorema di *Leibnitz*.

3. In secondo luogo andavo meco stesso pensando che colla sola inversione dell'ordine tenuto da *Condorcet* nel derivare dal calcolo le sue formule potevan agevolmente ottenere quella semplicità, naturalezza, e dimostrazione, che non ebbero uscendo dalla mente sublime del ch. Autore. Basta che in cambio del metodo ***analitico*** da lui adoperato venga sostituito il ***sintetico***, ed in vece di essere implicito il teorema di ***Fontaine*** sia esplicito e scoperto, come conviene al fonte primario, da cui prendono origine tutte quelle equazioni. Allora ogni passo sarà misurato, si vedranno grado a grado nascere chiaramente dalle formule più semplici le più composte, e s'osserverà da chiunque il come e perchè debbano essere necessariamente identiche l'***equazioni di condizione***, nella qual nitidezza e natural progressione d idee consiste appunto il pregio sommo dei metodi matematici. Ed ecco l'esempio del mio discorso, adattato al solo Problema II. per i motivi addotti nel §. 4. dell'Articolo I.

4. Sia $Adx + Bdy$ la funzione generale del prim'ordine a due variabili. Il suo diretto differenziale è $dA . dx + Addx + dB . dy + Bddy$; ed essendo di più $dA = \frac{dA}{dx} + \frac{dA}{dy}$, come

(*a*) Anche *M. Cousin* è dell'istesso parere a pag. VI. VII del discorso preliminare delle sue *Leçons* ecc. Ma di poi a pag. 14. del discorso medesimo, ed a pag. 1 delle Lezioni si contradice coll'introdurre nelle quantità generali l'elemento del tempo.

parimente $dB = \frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dy}$, diventa dopo fatte le debite sostituzioni $\left(\frac{dA}{dx}dx + \frac{dA}{ay}dy\right) dx + Addx + \left(\frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy\right)dy + Bddy$. Secondo il vero differenziale, a cui corrispondono ancora le formule del §. 6. dell' Articolo I., abbiamo $N = \frac{dA}{dx}dx + \frac{dB}{dx}dy$, $P = A$, e parimente $N' = \frac{dA}{dy}dx + \frac{dB}{dy}dy$, $P' = B$. Adunque, facendosi $(N) = \frac{dA}{dx}dx + \frac{dA}{dy}dy$, $(P) = A$, $(N') = \frac{dB}{dx}dx + \frac{dB}{dy}dy$, $(P') = B$, otterremo le due funzioni $\begin{matrix} Ndx + Ndy + Pddx + P'ddy \\ (N)dx + (N')dy + (Pddx) + (P')ddy \end{matrix}$, le quali debbono essere identiche, e per esserlo conviene solo che sia identica l'equazione $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$. Ma ora si torni a vedere che per mezzo del diretto ed immediato differenziale $(N)dx + (P)ddx + (N')dy + (P')ddy$ o sivvero $dA . dx + Addx + dB . dy + Bddy$ conseguirebbesi sempre l'equazione identica (inconcludente ed inutile) $dA - dA + dB - dB = 0$, cioè $(N) - d(P) + (N') - d(P') = 0$, come quella che non si parte dalla condizione d'integrabilità della data funzione $Adx + Bdy$. Affine di cambiare questa immediata, ma vana, equazione identica nell'altra equazione identica utile $N - dP + N - dP' = 0$, a cui si riporta il metodo di *Condorcet*, bisogna introdurvi la *condizione* dell' integrabilità della funzione data $Adx + Bdy$, la qual condizione importa, come abbiam visto, la sola equazione identica $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$ o sia $\frac{ddV}{dydx} = \frac{ddV}{dxdy}$, ch'è il teorema di *Leibnitz*. E qui avverto primieramente essere di tal natura l'equazione identica $dA - dA + dB - dB = 0$ che dividasi in due $dA - dA = 0$, $dB - dB = 0$ indipendenti affatto l'una dall'altra a motivo della nessuna relazione supposta tra le variabili x,

y, o loro differenziali. In fecondo luogo rifletto come per il teorema d'altronde noto di *Leibnitz* non effendovi luogo che alla fola *condizione* $\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}$, debbano con quefta fola neceffariamente verificarfi ambedue l'equazioni identiche $N - dP = o$. $N - dP = o$ affegnate per criterio dell'integrabilità da *Condorcet*, ed altri Analifti.

5. Paffando adeffo a ragionare delle funzioni differenziali di fecond'ordine comprefe nella formula generale $Adx^2+Bdxdy+Cdy^2+Dddx+Eddy$, e fattevi per comodo di calcolo le foftituzioni di $p=dx$, $p'=dy$, onde la funzione data fi trasformi nell' altra $Fdx+Gdy+Hdp+Idp'$, dove F, G, H, I rappresentano funzioni delle quattro variabili x, y, p, p', è certo che avremo per differenziale della medefima

$$dF.dx+Fdp+dH.dp+Hddp+dG.dy+Gdp'+dI.dp'+Iddp'$$

ovvero

$$dF.dx+(F+dH)dp+Hddp+dG.dy+(G+dI)dp'+Iddp'$$

o fia

$$(N)dx+(P)dp+(Q)ddp+(N)'dy+(P)'dp'+(Q)'ddp'.$$

Da ciò viene ad effere manifefto che ficcome fono identiche intuitivamente, e di loro natura ambedue l'equazioni

$$dF-(dF+ddH)+ddH=o,\quad dG-(dG+ddI)+ddI=o$$

debbano ancora godere dell'iftefsa identità le due altre equazioni

$$(N)-d(P)+d^2(Q)=o,\quad (N)'-d(P)'+d^2(Q)'=o.$$

Quefte equazioni identiche fi verifican fempre, nè fervono di criterio dell'integrabilità della formula data. Per ottenerlo, e trovare a quefto effetto le due altre equazioni identiche, che fiano il criterio dell'integrabilità, convien partire dal teorema di *Fontaine*, il quale, relativamente alla data formula $Fdx+Gdy+Hdp+Idp'$, fomminiftra le fei equazioni identiche $\frac{dF}{dy}=\frac{dG}{dx}$, $\frac{dF}{dp}=\frac{dH}{dx}$, $\frac{dF}{dp'}=\frac{dI}{dx}$, $\frac{dG}{dp}=\frac{dH}{dy}$, $\frac{dG}{dp'}=\frac{dI}{dy}$, $\frac{dH}{dp'}=\frac{dI}{dp}$. Adunque effendo $dF-dF-d^2H+d^2H=\Big(\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dp}dp$

$+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dp'}dp'\Big) - \Big(\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dp}dp+\frac{dF}{dy}dy\frac{dF}{dp}dp'\Big) - d\Big(\frac{dH}{dx}dx+\frac{dH}{dp}dp$
$+\frac{dH}{dy}dy+\frac{dH}{dp'}dp'\Big)+d\Big(\frac{dH}{dx}dx+\frac{dH}{dp}dp+\frac{dH}{dy}dy+\frac{dH}{dp'}dp'\Big)=o$, s'avrà pari-
mente $\Big(\frac{dF}{dx}dx+\frac{dH}{dx}dp+\frac{dG}{dx}dy+\frac{dI}{dx}dp'\Big) - \Big(dF+d\Big(\frac{dF}{dp}dx+\frac{dH}{dp}dp+\frac{dG}{dp}dy$
$+\frac{dI}{dp}dp'\Big)\Big)+d\Big(\frac{dH}{dx}dx+\frac{dH}{dp}dp+\frac{dH}{dy}dy+\frac{dH}{dp'}dp'\Big)=o$, cioè le due fun-
zioni, una conſiderata di ſopra $(N)-d(P)+d^2(\mathfrak{Q})$, e l'altra $N-dP+d^2Q$ diſpoſta ſecondo il vero differenziale, comprovato altresì dalle formule ſpiegate nel §. 6. dell' Articolo I., ſaranno termine a termine perfettamente identiche. Di quì ne naſce che dal differenziale immediato ed indentico $(N)-d(P)+d^2(\mathfrak{Q})=o$ derivi la prova dell' identità dell' altro differenziale utile e vero $N-dP+d^2\mathfrak{Q}=o$, ch'è appunto l'*equazione di condizione* aſſegnata da *Condorcet*. Col medeſimo metodo conſeguirebbeſi $dG-dG-d^2I+d^2I=N)'-d(P)'$
$+d^2(\mathfrak{Q})'=o=\Big(\frac{dB}{dx}dx+\frac{dB}{dp}dp+\frac{dB}{dy}dy+\frac{dB}{dp'}dp'\Big) - \Big(\frac{dB}{dx}dx+\frac{dB}{dp}dp$
$+\frac{dB}{dy}dy+\frac{dB}{dp'}dp'\Big) - d\Big(\frac{dI}{dx}dx+\frac{dI}{dp}dp+\frac{dI}{dy}dy+\frac{dI}{dp'}dp'\Big)+d\Big(\frac{dI}{dx}dx+\frac{dI}{dp}dp$
$+\frac{dI}{dy}dy+\frac{dI}{dp'}dp'\Big)=\Big(\frac{dF}{dy}dx+\frac{dH}{dy}dp+\frac{dG}{dy}dy+\frac{dI}{dy}dp'\Big) - \Big(dG+d\Big(\frac{dF}{dp'}dx$
$+\frac{dH}{dp'}dp+\frac{dG}{dp'}dy+\frac{dI}{dp'}dp'\Big)\Big)+d\Big(\frac{dI}{dx}dx+\frac{dI}{dp}dp+\frac{dI}{dy}dy+\frac{dI}{dp'}dp'\Big)=N'-dP$
$+d^2\mathfrak{Q}'=o$ ſecondo il vero differenziale, come confermano le ſolite formule del §. 6. ſopraccitato. E ſi potrebbe proceder più oltre ſenza maggiore difficoltà alle funzioni degli altri gradi ſe i limiti di queſto ſcritto lo permetteſſero.

6. In ſomma principia il mio metodo da far vedere che il differenziale *immediato* di qualunque data funzione, o integrabile, o no, debba ſempre condurre ad un'equazione identica per ciaſcheduna delle variabili x, y ec. Fa dipoi l'altro paſſo importante, ed è quello che poſto in ordine il differenziale medeſimo (che gioverebbe dopo di ciò chiamare

re *mediato*) secondo dx, d^2x ec., dy, d^2y ec., abbiasi nel solo caso dell' integrabilità della funzione assegnata, cioè nell' unico caso che si verifichi a tutti i riguardi il teorema di *Leibnitz* o di *Fontaine*, ognuna dell' equazioni identiche summentovate precisamente l' istessa (termine a termine) di quella di *Condorcet*, nella quale si viene allora a rendere manifesto che debba consistere il criterio della possibilità dell' integrazione. Con questa differenza però che mentre il criterio dell' integrabilità dedotto dal puro teorema di *Fontaine* risparmia le repliche dell' equazioni identiche, come s'è veduto poc' anzi nei §§. 4, e 5, l' altro criterio riduca l' *equazioni* identiche *di condizione* a minor numero delle prime (*a*), e comprenda spesso più coperte ed inviluppate le formule di *Fontaine* (*b*). Il primo risale dall' equazioni identiche di *Fontaine* all' equazioni identiche di *Condorcet*, e scuoprendo, e misurando, e dimostrando ogni passo, che faccia, conduce a vedere che le seconde dipendano dalle prime. Il secondo discende dall' equazioni identiche di *Fontaine*, ma coperte e nascoste, all' *equazioni di condizione* che sono il soggetto principale della bellissima opera di *Condorcet*, e senza discuoprire e dicifrare le formule di *Fontaine* mancherebbe di prova (*c*). Perchè questo parallelo dei due metodi, uno diretto, e l' altro inverso, si scorga ancora meglio e nel massimo lume, vediamolo nella maniera più generale, ed invertendo soltanto il cammino tenuto da *Condorcet* (*d*).

$$V = \frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dp}q + \frac{dB}{dq}r + \frac{dB}{dr}s + \text{ec.}$$
$$+ \frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dp'}q' + \frac{dB}{dq'}r' + \frac{dB}{dr'}s' + \text{ec.}$$

Dunque

(*a*) Ciò si conosce facilmente sino dalla *Remarque* III. del III. Problema dove son quattro l' equazioni identiche, in cambio di sei che dà il metodo di *Fontaine*.

(*b*) Basta fare il parallelo dei N. 8. e 9. dell' Articolo I.

(*c*) Ciò vuol dire che $V = dB$, e $dV = ddB$, non sono equazioni valevoli a determinare il Problema dell' integrabilità di V, come suppone questo celebre Autore.

(*d*) Confrontisi particolarmente nel metodo, che segue, il proceder del calcolo con quello del II. Problema.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dunque } dV = d\frac{dB}{dx}p + \frac{dB}{dx}q + \frac{dB}{dp}r + \frac{dB}{dq}s + \frac{dB}{dr}t + \text{ec.} \\ \qquad + d\frac{dB}{dp}q + d\frac{dB}{dq}r + d\frac{dB}{dr}s + \text{ec.} \\ \quad + d\frac{dB}{dy}p' + \frac{dB}{dy}q' + \frac{dB}{dp'}r' + \frac{dB}{dq'}s' + \frac{dB}{dr'}t' + \text{ec.} \\ \qquad + d\frac{dB}{dp'}q' + d\frac{dB}{dq'}r' + d\frac{dB}{dr'}s' + \text{ec.}\end{array}\right\} \text{differ. immed.}$$

ch' è come dire $\begin{array}{l}(N) - d(P) + d^2(\mathcal{Q}) - d^3(R)\ \text{ec.} = o \\ (N)' - d(P)' + d^2(\mathcal{Q})' - d^3(R)'\text{ec.} = o\end{array}$ equazioni identiche, le quali equazioni intuitivamente identiche, quando col ſoccorſo unico delle formule di *Fontaine* vi ſiano ſurrogate in cambio di $d\frac{dB}{ax}, d\frac{dB}{dp}, d\frac{dB}{dq}, d\frac{dB}{dr}$ ecc. $d\frac{dB}{dy}, d\frac{dB}{dp'}$, $d\frac{dB}{dq'}, d\frac{dB}{dr'}$ ecc. le loro eſpreſſioni identiche, che riſultano dal §. 8. dell'Articolo I., ſi convertono nelle vere ed utili *equazioni di condizione* $N - dP + d^2\mathcal{Q} - d^3R + \text{ec.} = o$
$N' - dP' + d^2\mathcal{Q}' - d^3R' + \text{ec.} = o$, come ſpiegano con tutta chiarezza i differenzio-differenziali di B nell' Articolo I. al §. 6. (*a*).

7. Che poi tutte l'*equazioni di condizione* aſſegnate da M. *Fontaine* ſiano in ſoſtanza la ſola formula data da *Leibnitz*, e che queſta ſia un teorema, e non già propoſizione intuitiva, ognuno lo ſa per poco che ſappia l'iſtoria del calcolo differenziale e integrale. E difatti il teorema III. delle *Memoires* di *Fontaine* a pag. 26., il quale ſi riferiſce alla funzione ſempliciſſima di due variabili $Adx + Bdy$ differenziale del primo grado, è quello, ſopra di cui ſi ſoſtengono tutte l'*equazioni di condizione* da lui ſpiegate nel ſuo *Premiere*

(*a*) Gli chiamo differenzio-differenziali relativamente alla funzione *B*, ma in rigore poſſono ben eſſere differenze terze, quarte ecc. ſe la funzione data *V* foſſe di ſecondo, di terzo grado ecc.

Methode fino alla pag. 84. Sebbene il ch. Autore applichi quel teorema all' equazioni differenziali di varj ordini, e non alle funzioni, tuttavia è facile argomentare dalla dimostrazione del Teorema IV, e suo Corollario a pag. 27., che per mezzo del fattore e coefficiente M, comune a tutti i termini, l' equazione diventi funzione di qualunque numero di variabili, e di qualunque grado *(a)*. Ma il precitato Teorema III., che somministra il criterio dell' integrabilità della funzione $Adx + Bdy$ mediante l' equazione identica $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, deriva immediatamente dal teorema di *Leibnitz*, il quale stabilisce e dimostra che mentre s' abbia $\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} . dx$, dove a, x siano due variabili del tutto indipendenti tra loro, venga ad essere $d\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} . dx$ facendo solamente variabile a, o sivvero la differenza parziale $\frac{d\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} . dx}{da}$ $= \frac{ada . dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$, ed in generale s' ottenga coll' istesso principio dato da *Leibnitz* $\frac{d\int \mu dx}{dy} = \frac{dy\int d\mu}{dy} dx$. Ora da quest' ultima equazione deriva appunto l' altra $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, siccome dimostra il confronto dei Teoremi II. e III. dell' istesso *Fontaine*. Tanto è ciò vero, quanto che gli Analisti quasi tutti, i quali hanno dovuto provare nelle loro opere l' *equazioni di condizione*, l' appoggino al prenotato teorema di *Leibnitz*. Di quelli, che ho adesso sott' occhio, si riscontrino la *Memoria* di M. *Clairaut* tra l' altre dell' Accademia Reale delle Scienze di

(a) L' istesso ho detto relativamente al metodo tenuto da *Condorcet* nel num. 4. dell' Articolo I.

Parigi nel volume per l'anno M. DCC. XL., pubblicato nel XLII., dove tratta dell'integrazione dell'equazioni differenziali di primo grado, e particolarmente ai §§. II. della Parte I., e VIII. del Cap. I. della Parte II., il Traité du Calcul Integral par M. *de Bougainville* Parte II. Sez. I. Cap. II. ai §§. XV. XVIII. e XXVIII., le *Institutiones Analyticae* di *Riccati* e *Saladini* al Lib. II. del Tomo II. Cap. XIII. §. 2. e segg., e le *Leçons de calcul differentiel & de calcul integral par M. Cousin*, impresse a Parigi nel M. DCC. LXXVII., segnatamente ai N. 52. del Cap. V. a p. 255. 264., e 58. del Cap. VI. a pag. 329. e 330. E riguardo a quei Matematici, ch'hanno voluto per dimostrare il teorema di *Fontaine* discostarsi da quello di *Leibnitz*, come per esempio *Leonardo Euler* nella Parte I. p. 191. e segg. delle *Institutiones calculi differentialis*, i PP. Minimi le *Seur* e *Jacquier* nel Cap. I. della Parte I. al §. XXIX. e segg. pag. 27. e segg. degli *Elemens du calcul integral*, e l'istesso *Cousin* nelle *Lezioni* precitate (Parte I. Cap. III. p. 83. e seg.) (*a*), si veda quanto più operosa e meno chiara comparisca la loro dimostrazione. Intanto non si può a meno di non inferirne come nel medesimo modo che non si sarebbe potuto mai indovinare che dall'*Aritmetica degli Infiniti* di wallis l'Algebra infinitesimale fosse stata per essere nel corso d'un secolo condotta a così alto segno da produrre le *Instituzioni di calcolo differenziale* dell'*Euler* (*b*), egualmente non si potesse mai far prognostico ragionevole che il teorema di *Leibnitz*, il quale nasce dall'applicazione felice dell'assioma *il tutto è uguale alla somma delle sue parti*, avesse dovuto dar nascita alle differenze *parziali*, all'*equazioni di condizione*, ed al calcolo delle *variazioni* (*c*) in meno d'un secolo (*d*).

V ij

(*a*) Quantunque sia qui il primo luogo dove incominci a parlarne.

(*b*) L' *Aritmetica ecc.* è del 1655. (sebbene la data sia del 1656.), e le *Instituzioni ecc.* sono del 1755.

(*c*) Num. 5. del seg. Articolo III.

(*d*) Quel teorema è del 1697., mentre il metodo di M. de la *Grange* fu fatto di ragion pubblica nel 1761.

ARTICOLO III.

D'alcuni altri teoremi ſparſi nell' opera del Marcheſe de Condorcet.

1. Avanti di tutto gioverà ſperimentare il metodo adoperato nell' Articolo precedente, ch' è l' inverſo di quello di *Condorcet*, per conſeguire la prova del teorema belliſſimo, il quale ſi trova nella *Remarque II.* a pag. 21. del IV. Problema.

2. Sia perciò V una funzione integrabile, ed il ſuo integrale ſia una funzione differenziale del grado proſſimamente inferiore. L' eſpreſſione generale ſarà queſta

$$V = Adx + Bdp + Cdq + \text{ec.}, \quad \text{laonde} \quad dV = \begin{array}{l} dA.dx + Adp + Bdq + Ddr \ \text{ec.} \\ + dBdp + dCdq \\ + dA'dy + Adp' + B'dq' + D'dr' \ \text{ec.} \\ + dB'dp' + dC'dq' \end{array}$$
$$+ A'dy + B'dp' + C'dq' + \text{ec.}$$

Ma in virtù del II. Articolo

$$dA = N, A + dB = P, B + dC = Q, C + dD = R, \ \text{ecc.}$$
$$dA' = N, A' + dB' = P', B' + dC' = Q', C' + dD' = R', \ \text{ecc.}$$

Adunque

$$N = dP - d^2Q + d^3R - d^4S \ \text{ec.} = dA, \ \text{onde} \ A = P - dQ + d^2R - d^3S \ \text{ec.}$$
$$N = dP' - d^2Q' + d^3R' - d^4S' \ \text{ec.} = dA' \qquad A' = P' - dQ' + d^2R' - d^3S' \ \text{ec.}$$

Parimente

$$\begin{array}{lll} A + dB = P, \ \text{e perciò} & dB = dQ - d^2R + d^3S \ \text{ec.}, & B = Q - dR + d^2S \ \text{ec.} \\ A' + dB' = P' & dB' = dQ' - d^2R' + d^3S' \ \text{ec.}, & B' = Q' - dR' + d^2S' \ \text{ec.} \\ B + dC = Q & dC = dR - d^2S \ \text{ec.} & , C = R - dS \ \text{ec.} \\ B' + dC' = Q' & dC' = dR' - d^2S' \ \text{ec.} & , C' = R' - dS' \ \text{ec.} \\ C + dD = R & dD = dS \ \text{ec.} & , D = S \ \text{ec.} \\ C' + dD' = R' & dD' = dS' \ \text{ec.} & , D' = S' \ \text{ec.} \end{array}$$

Cumulando, ed ordinando le ritrovate espressioni, ne nasce

$$\begin{array}{ll} V = A\,dx + B\,dp + C\,dq + D\,dr \text{ ec.} = & (P - d\mathcal{Q} + d^2R - d^3S \text{ ec.})\,dx \\ +A'dy + B'dp' + C'dq' + D'dr' \text{ ec.} & + (\mathcal{Q} - dR + d^2S \text{ ec.} \ldots)\,dp \\ & + (R - dS \text{ ec.} \ldots\ldots)\,dq \\ & + (S \text{ ec.} \ldots\ldots\ldots)\,dr \\ & + (\quad \text{ec.} \quad) \\ & + (P' - d\mathcal{Q}' + d^2R' - d^3S' \text{ ec.})\,dy \\ & + (\mathcal{Q}' - dR' + d^2S' \text{ ec.} \ldots)\,dp' \\ & + (R' - dS' \text{ ec.} \ldots\ldots)\,dq' \\ & + (S' \text{ ec.} \ldots\ldots\ldots)\,dr' \\ & + (\quad \text{ec.} \quad) \end{array}$$

ch'è appunto il teorema da dimostrarsi *(a)*.

3. Altro teorema, ed ancor più elegante, si è quello della *Remarque* IV. dopo il III. Problema. *Condorcet* ha qui per oggetto di rintracciare il motivo *analitico*, in virtù del quale le medesime *equazioni di condizione*, che danno l'integrabilità della funzione $\int V$, diano ancora il *massimo* o *minimo* di $\int V$. Le due questioni non apparifscono analoghe; e perciò non mancano di presentare ai Geometri un fenomeno raro, che non può a meno di non avere per causa la vera e reale *identità analitica* dei due problemi. Dopo le formule date da M. de la *Grange*, *l'Euler* spiegò indirettamente questa coincidenza di formule *(b)*, ed il Marchese *de Condorcet*, ch'è stato il primo di tutti a spiegarla in una maniera diretta, lo fa di tal sorte che sembri troppo elaborato e profondo il suo metodo *(c)*. Ciò mi ha dato motivo di pensare a semplificarlo, e dicifrare quell'*identità analitica* in una forma, che sia facile, chiara, ed a portata di tutti.

4. Io la discorro così

$$\int \dot{V} = \int\int dV = \int\int \begin{array}{l} N\,dx + P\,dp + \mathcal{Q}\,dq + \mathcal{Q}\,dr + \text{ec.} \\ +N'dy + P'dp' + \mathcal{Q}'dq' + R'dr' + \text{ec.} \end{array}$$

(a) Si vedano le *Lezioni* di M. *Cousin* nella I. Parte a pag. 108.

(b) Si consulti il Tom. X. dei Nuovi Commentarj dell'Accademia di Pietroburgo alle pag. 133. 34. come ho avvertito nella Nota *(a)* pag. 137.

(c) Lo contengono le pag. 16. 17. e 18.

Per il *maſſimo* o *minimo* dev' eſſere

$$\delta\int\!\!\int \begin{matrix} Ndx+P\,dp+\mathfrak{Q}\,dq+R\,dr+\text{ec.} \\ +N'dy+P'dp'+\mathfrak{Q}'dq'+R'dr'+\text{ec.} \end{matrix} = o$$

. L' equazione o equazioni che determinino il *maſſimo* o *minimo*, qualunque elle ſiano per eſſere (che non importa adeſſo cercarle), devono avere neceſſariamente queſti due requiſiti, 1°. cioè hanno da eſſer compoſte (nè ora giova di ſaper come) di $N, P, \mathfrak{Q}, R$, ec., $N', P', \mathfrak{Q}', R'$, ec. e loro differenziali, 2°. hanno da eſſere le medeſime e della medeſima forma tanto nel caſo che $\int V$ ſia integrabile, quanto nell' altro che non lo ſia, perchè nella riſoluzione generale del problema del *maſſimo o minimo* l' Analiſi non riſguarda, nè deve mai riſguardare ſe $\int V$ ſia funzione integrabile, o piuttoſto un integrale *indefinito*. Ecco come l' equazione o equazioni di $\delta\int V = o$ ſia d' *analitica* neceſſità che debbano eſſere perfettamente conformi nelle due ipoteſi, colla ſola differenza che $\int V$ non eſſendo integrabile, quell' equazione o equazioni non ſaranno identiche, ma ſtabiliranno la relazione tra le variabili x, y ec. della curva, ſuperficie ec., a cui ſpetti il *maſſimo* o *minimo* (*a*), e nel caſo contrario di $\int V$ integrabile, quell' equazione o equazioni ſaranno *identiche*, perchè eſclusive del *maſſimo* o *minimo*.

5. Anzi di qui ſi deduce che ſenza l' ajuto del metodo eccellente adoperato dall' *Euler* nella ſua grand' Opera pubblicata del M. DCC. XLIV. intorno il problema degli Iſoperimetri (*b*), e ſenza il ſoccorſo del Calcolo delle variazioni perfezionato da M. de la *Grange* (*c*), col teorema ſolo di *Lebnitz* o di *Fontaine* ſi poteſſero ſciogliere tutti i problemi de' *maſſimi* e *minimi*. Imperocchè, ſiccome queſto teo-

(*a*) Pare che *Condorcet* a pag. 17. v. 9. coll' eſpreſſione *qui doit être identique* dia a credere d' aver ſuppoſto che l' equazione determinante il *maſſimo* o *minimo* abbia ancor eſſa da eſſere *identica*, cioè debba eſſere $o = o$, quando al contrario deve fiſſare la relazione tra le variabili.

(*b*) Intendo di quella intitolata *Methodus inveniendi Lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, ſive ſolutio Problematis Iſoperimetrici latiſſimo ſenſu accepti*.

(*c*) *Tomus alter* delle Miſcellanee di Torino.

Nè tolgono pregio a queſta bella parte del calcolo le Oſſervazioni fatte dal Cav. de *Borda* nel Tomo delle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi per l' anno 1767.

rema a ſorma delle prove datene nell' Articolo II. ha prodotte l' equazioni identiche $N - dP + d^2 Q - d^3 R + d^4 S$ ec., $N' - dP' + d^2 Q' - d^3 R' + d^4 S'$ ec. $= 0$ nel caſo di $\int V$ integrabile, così in virtù del precedente num. 4°. le medeſime equazioni $N - dP + d^2 Q - d^3 R + d^4 S$ ec., $N' - dP' + d^2 Q' - d^3 R' + d^4 S'$ ec., ec. $= 0$ ſon quelle che non altrimenti identiche riſolvano ancora il problema di $\int V$ *maſſimo* o *minimo* quando $\int V$ non ammetta integrazione. Queſto è un nuovo luſtro ed elogio dell' importanza, univerſalità, e fecondità ſomma del teorema di *Lebnitz*; per modo che mentr' *Euler* credeva di dover derivare l' *equazioni di condizione* da quelle dei *maſſimi* e *minimi* (*a*), io abbia fatto conoſcere per il contrario che le ſeconde ſi derivino dalle prime (*b*). Tanto è vero che un ritrovato ſolo d' un uomo grande faccia ſpeſſo cambiar d' aſpetto le ſcienze, e le arti.

6. Taluna volta accade perfino che certi problemi di *maſſimi* o *minimi* non abbiano di biſogno di tutto l' apparato ſublime del calcolo delle *variazioni*, e ſi riſolvano ſenza di queſto colla maggiore ſemplicità. Ero nella mia adoleſcenza, nè avevo ſentore alcuno del metodo nuovo di M. *de la Grange* quando leggendo nei loro fonti le tante ed operoſe ſoluzioni, parte dirette, parte indirette, del famoſo problema della curva *brachiſtocrona*, o come altri la chiamano *oligocrona*, mi venne in penſiero di ſcioglierlo col ſolito calcolo differenziale. Tentai la coſa più per iſcherzo che per la ſperanza d'una felice riuſcita, ben prevedendo che quel problema non ſi poteſſe, nè ſi doveſſe trattare come il *maſſimo* o *minimo* d'una curva data, ma d'una curva variabile all' infinito. E poi ſe foſſe ſtato poſſibile, l' avrebbero così riſoluto prima di me i ſommi Analiſti *Bernoulli*, *Nevvton*, *Leibnitz*, e Marcheſe *de l' Hôpital*. Tuttavolta il fatto fu che il tentativo rieſciſſe (*c*).

7. Mi provai dunque nella ſuppoſizione Galileana della

(*a*) Vedaſi il n. 2. dell' Articolo II.

(*b*) Dal teorema di *Leibnitz* ſi deducono ancora (ved. Nota 3.) le formule conoſciute del metodo delle *variazioni* $\int\int \delta B dx = \int \delta \int B dx = \delta \int\int B dx$, perchè tutte dipendono da $\delta \int B dx = \int \delta B dx$.

(*c*) M' accadde d' oſſervarlo nel 1764.

gravità costante a risolverlo, facendo $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}}\right)=o$; e posto per comodo di calcolo dy costante, ottenni subito $\frac{dx d^2x \, . \sqrt{x}}{x\sqrt{dx^2+dy^2}}=\frac{dx\sqrt{dx^2+dy^2}}{2x\sqrt{x}}$, che vale a dire $2x=\frac{dx^2+dy^2}{d^2x}$. Avvertii facilmente come essendo $\frac{dx^2+dy^2}{d^2x}$ l'espressione generale del *Cor-Raggio* osculatore (*a*), veniva questo ad esser duplo dell'ordinata x, ch'è appunto la proprietà della Cicloide primaria inversa, ch'abbia l'estremo della sua base orizzontale nel punto più alto dei due, per cui debba passare l'arco della Brachistocrona ricercata. Credendo che ciò derivasse da una combinazione meramente casuale, passai a sperimentare l'istesso metodo nell'ipotesi di gravità di *Gio. Battista Baliani*, sebbene impossibile e assurda. Allora s'aveva $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{x}\right)=o$, cioè $\frac{x dx d^2x}{\sqrt{dx^2+dy^2}}=\sqrt{dx^2+dy^2} \, dx$, cioè $x=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{d^2x}$, o sia il *Cor Raggio* osculatore eguale all'ordinata, ch'è quanto dire la Brachistocrona un arco inverso di circolo (*b*). Andai più avanti, ma non volli altrimenti fidar-

---

(*a*) *Analyse des infiniment petits* par de l'*Hopital* ediz. d'Avignone del 1768. a pag. 106.

(*b*) M. *Montucla* nel Tomo II. della sua *Histoire ecc.* a pag. 453. 457. accusa il *Galileo* per aver supposto la Brachistocrona essere una porzione della periferia circolare. Questo è uno sbaglio pari all'altro, ch'ei fa a pag. 446. 47., rispetto alla Catenaria, dove afferma che il *Galileo* la supponesse l'istessa della parabola Apolloniana. Ho dimostrato l'opposto nella mia Opera presochè tutta stampata *intorno i Solidi Cocleari*. Osservo però che quanto son perdonabili agli Oltramontani degli errori d'Istoria sul *Galileo*, altrettanto non siano scusabili per gl'Italiani. In un libro d'Elogi d'illustri Italiani stampato a Pisa nel 1784 parlandosi di *Galileo* (*Elogio del Perelli*) si dice a pag. 54. „ in quella scuola „ (*dello Studio di Pisa*) in cui il *Galileo* aveva il primo....... annunziato tante sue celesti scoperte, e l'uso mirabile per la Geografia e Nautica di quelle dei Satelliti di Giove. „ Eppure ognun sa che quasi tutte le scoperte celesti del *Galileo* fossero fatte del 1609. e 1610 nello Studio di Padova, e non in quello di Pisa, ch'egli aveva lasciato fino dal 1592. senza

fidarmi del mio risultato. Lo mostrai immantinente al mio grande amico Cav. *Felice Fontana*, e ne rimase ancor egli sorpreso (a). Adesso però egli è ben facile ravvisare il preciso motivo, per cui da quel metodo falso nascessero delle Brachistocrone vere.

8. Difatti, prevalendoci della legge di *Galileo*, $\int\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}}$ dev'essere un *minimo*. Pongasi ora costante dx. Dal teorema di *Leibnitz* a forma del num. 5°. conseguiremo $N-dP'+d^2\mathfrak{Q}'-d^3R'+$ ec. $=o$; ed essendo $\mathfrak{Q}'$, R' ec. $=o$ per la natura della formula data, e di più ancora $N=o$, converrà unicamente fermarsi a considerare dP', che in questo caso, avendosi $P'=\frac{dy}{\sqrt{x}\sqrt{dx^2+dy^2}}$ (b) somministra l'equazione $-dP'=o$, o sivvero (fatto per comodo dy costante) $dP'=o=-\frac{1}{2x}-\frac{d^2x}{dx^2+dy^2}$, di dove si ricava $2x=\frac{dx^2+dy^2}{-d^2x}$. Parimente surrogata l'ipotesi del *Baliani*, viene ad essere per l'istessa ragione $P'=\frac{dy}{x\sqrt{dx^2+dy^2}}$, e perciò $dP'=o=-\frac{1}{x}-\frac{d^2x}{dx^2+dy^2}$, ed in conseguenza $x=\frac{dx^2+dy^2}{-d^2x}$. Di qui n'avviene che tanto $dP'=o=d\left(\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)$, quanto d

più ritornarvi. Quando l' Elogiografo non avesse avuto in pensiero quel titolo meramente d'onore di Matematico primario dello Studio di Pisa senza peso di leggervi, nè risedervi, ch' ebbe tra gli altri il gran *Galileo* sino dal mese di Luglio del 1610. richiamato da Padova dal Gran Duca *Cosimo II.* Ma allora la frase istorica meriterebbe uno schiarimento.

(a) Ben volentieri paleso qui al mondo la gratitudine ch' io debbo a questo Filosofo insigne, come quello che mi ha dato più volte e comodo e coraggio per applicarmi alle Matematiche, quando specialmente attendevo in Pisa allo Studio della Filosofia delle Leggi.

(b) Si consulti M. *Cousin* nella prima parte delle *Lezioni* precitate a pag. 347. 48.

$\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}}\right)=o$, come ancora $dP'=d\left(\frac{1}{x\sqrt{dx^2+dy^2}}\right)=o$, e $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{x}\right)=o$ conducendo respettivamente ad una medesima equazione tra le variabili x, y, s'intenda perchè il problema della Brachistocrona riceva la sua soluzione dal semplice differenziale $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{\sqrt{x}}\right)=o$, $d\left(\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{x}\right)=o$. Nè potrebb'essere diversamente: imperocchè in generale tanto $d\left(\frac{z}{v}\right)=o$, quanto $d\left(\frac{1}{vz}\right)=o$ danno l'istessa equazione finale $vdz=\pm zdv$. E ciò fa conoscere che il problema della Brachistocrona risolverebbesi sempre col medesimo metodo semplicissimo in qualunque ipotesi di gravità, dove la velocità della caduta venisse universalmente rappresentata da φx, funzione qualunque di x. La sola diversità, che si trovi, consiste nell'essere il secondo membro dell'equazione positivo in un caso, e negativo nell'altro, lo che appare ancora dal paragone del *Cor Raggio* trovato in questo §. coll'altro trovato nel §. antecedente. Ma di queste singolarissime soluzioni d'alcuni problemi di *massimi* o *minimi*, non meno che d'alcune particolarità interessanti del metodo delle variazioni, e del rimanente dell'Opera sul *calcolo integrale* del Marchese *de Condorcet* avrò in altro tempo occasione d'esporre al pubblico i miei pensieri.





